Szkic notatek do wykładu
Analiza Funkcjonalna MAP9907
Prowadzący: prof. dr hab. Tomasz Downarowicz

Sporządził: Paweł Szołtysek

Spis treści.

Wstęp do Analizy Funkcjonalnej.
0. Przestrzenie

Przestrzeń metryczna (topologia): (X, d)

Przestrzeń mierzalna: (X, Σ, μ)

Przestrzeń liniowa: $(X, +, \cdot)$

1. Metryka

Metryka w przestrzeni X to funkcja $d: X \times X \to [0, \infty)$ spełniająca trzy aksjomaty metryki:

1) tożsamości $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) symetrii $\quad d(x,y) = d(y,x)$
3) nierówności trójkąta $\quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

Przykłady

1. X – prosta rzeczywista
   $d(x,y) = |x - y|$
2. X – przestrzeń rzeczywista n-wymiarowa
   taksówkowa: $d_t\big((x_1, x_2, \ldots x_n), (y_1, y_2, \ldots y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
   supremum: $d_{\sup}\big((x_1, x_2, \ldots x_n), (y_1, y_2, \ldots y_n)\big) = \sup_i |x_i - y_i|$
   euklidesowa: $d_e\big((x_1, x_2, \ldots x_n), (y_1, y_2, \ldots y_n)\big) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
3. X – zbiór funkcji ograniczonych $f: A \to \Re$
   $d_{\sup}(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$
4. Przestrzeń mierzalna (Ω, Σ, μ)
   $X = L^1(\mu) = \left\{ f: \Omega \to \Re : \int f d\mu < \infty \right\}$
   $d_1(f,g) = \int |f - g| d\mu$
   $X = L^2(\mu) = \left\{ f: \Omega \to \Re : \int f^2 d\mu < \infty \right\}$
   $d_2(f,g) = \sqrt{\int (f - g)^2 d\mu}$

2. Kula

Kula otwarta o środku w punkcie $x \in X$ i promieniu $r > 0$ w przestrzeni metrycznej (X, d) to zbiór $K_d(x,r) = K_d^r(x) = \{x\}^r = \{y : d(x,y) < r\}$.

Przykłady

1. $\Re^2; d_{\sup}$ – kwadraty osiowe o bokach $2r$
2. $\Re^2; d_t$ – kwadraty diagonalne o bokach $r\sqrt{2}$

Jeśli w X są dwie metryki d_1 i d_2 oraz dla dowolnych x,r $K_{d_1}(x,r) = K_{d_2}(x,r)$ to $d_1 = d_2$.

Dowód

$d(x,y)=\inf\{r: y\in K(x,r)\}$

Kula w przestrzeni funkcyjnej.

- $d_{\sup}$
- L_1
- L_2

3. Zbiory otwarte i domknięte

Zbiór $U\subset(X,d)$ jest **otwarty**, jeśli $\forall_{x\in U}\exists_{r>0}K(x,r)\subset U$.

Dla każdego $x, r>0, K(x,r)$ jest **zbiorem otwartym**.

Dowód

(……)

Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Dowód

(……)

Przekrój skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Dowód

(……)

Zbiór F jest **domknięty**, jeśli jego dopełnienie jest otwarte.

Przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięty.

Suma skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięta.

Przykład

$\Re, d(x,y)=|x-y|$

$K(x,r)=(x-r,x+r)$

$$(a,b)=\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2},\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\right)=K\left(\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2}\right)$$

$$(-\infty,a)=\bigcup_n(a-n,a)$$

$$(a,+\infty)=\bigcup_n(a,a+n)$$

$[a,b]$ jest domknięty, gdyż jego dopełnienie to $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$, czyli zbiór otwarty.

$(-\infty,a]$ jest domknięty, gdyż jego dopełnienie to (a,∞), czyli zbiór otwarty.

$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right]$ nie jest ani otwarty, ani domknięty.

4. Zbieżność

Ciąg $(x_n)\subset X$ w (X,d) jest **zbieżny** do $x\in X$ co zapisujemy $x_n\to x$ lub $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, jeśli $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$. (Zbieżność ciągu liczbowego.)

Zbiór F jest **domknięty** wtedy i tylko wtedy, jeśli z faktu, że $\lim_n x_n=x$ i $\forall_n x_n\in F$ wynika, że $x\in F$.

Dowód

(……)

5. Ciągłość, ograniczoność, jednostajna ciągłość

Niech (X,d) i (Y,e) będą przestrzeniami metrycznymi. Funkcja $f: X \to Y$ jest **ciągła**, jeśli:

1. (Heine) z faktu, że $\lim x_n = x$ wynika, że $\lim f(x_n) = f(x)$;
2. (Cauchy) $\forall_{x \in X} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} d(x,y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon$;
3. $\forall_{otwartego V \subset Y}$ przeciwobraz $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in Y\}$ jest otwarty w X.

   Dowód

   (……)

Nierówność Schwartza: $\left(\int fg\right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$

Dowód

(……)

Podzbiór przestrzeni metrycznej (X,d) jest **ograniczony**, jeśli jest on zawarty w pewnej kuli.

Jednostajna ciągłość funkcji: $\forall_\varepsilon \exists_\delta \forall_{x,y} d(x,y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Przykład

$x^2 : \Re \to \Re$ - funkcja ciągła niejednostajnie

$y = x + \delta$

$d(x^2, x^2 + 2\delta x + \delta^2) = 2\delta x + \delta^2 < \varepsilon$

$(Y,d),(Z,e)$ - przestrzenie metryczne

$X = B(Y,Z) = \{$ zbiór funkcji ograniczonych $f: Y \to Z\}$

$f_n \xrightarrow{d_{\sup}} f \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$

6. Homeomorfizm

Funkcja $f: X \to Y$ jest **homeomorfizmem**, jeśli jest ona odwracalna (różnowartościowa i na), ciągła i odwrotna do niej też jest ciągła.

Funkcja $f: X \to Y$ jest **jednostajnym homeomorfizmem**, jeśli jest ona homeomorfizmem, jednostajnie ciągła i odwrotna do niej też jest jednostajnie ciągła.

7. Własności topologiczne i metryczne

Własność przestrzeni (X,d) jest **topologiczna**, jeśli ma ją każda przestrzeń homeomorficzna z (X,d).

Własność przestrzeni (X,d) jest **metryczna**, jeśli nie jest ona topologiczna, ale ma ją każda przestrzeń jednostajnie homeomorficzna z (X,d).

8. Lipschitz

Warunek **Lipschitza** $\exists_c \forall_{x,y} e(f(x), f(y)) \leq c d(x,y)$

Funkcja **Lipschitzowska** (spełniająca warunek Lipschitza) jest zawsze jednostajnie ciągła.

Jeśli f' istnieje na całej dziedzinie to $|f'| < c \Leftrightarrow f$ jest **Lipschitzowska** ze stałą c. Z twierdzenia Lagrange'a, $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = f'(\zeta) \leq c$.

Nie każda funkcja jednostajnie ciągła jest Lipschitzowska.

Przykład

$y = \sqrt{x}$ na $(0,\infty)$

$\sqrt{x} - \sqrt{y} \le \sqrt{x-y} < \varepsilon$

9. Podstawowość, zupełność

<u>Ciąg podstawowy (Cauchy'ego)</u> (x_n) w przestrzeni (X,d) spełnia warunek

$\forall_{\varepsilon}\exists_{n_0}\forall_{n\ge n_0}\forall_{m\ge n_0} d(x_m,x_n) < \varepsilon$

Każdy ciąg zbieżny jest podstawowy.

Każdy ciąg podstawowy jest ograniczony.

Dowód

(……)

Przykład

0 1 0 1 0 1 0 …. (ciąg niepodstawowy)

$X = (0,1]$ $d = |x-y|$ $x_n = \frac{1}{n}$ (ciąg podstawowy, ale nie jest zbieżny gdyż granica nie należy do *X*)

Jeżeli x_n jest podstawowy to $\forall_{x\in X}$ istnieje granica $\lim d(x,x_n)$.

Przestrzeń (X,d) jest **<u>zupełna</u>**, jeśli każdy ciąg podstawowy jest zbieżny.

Przykłady

1. $\Re$
2. (X,d) – przestrzeń zupełna; *F* – zbiór domknięty w *X*. Wtedy (*F*,*d*) – zupełna.

   Dowód

   (……)
3. [0,1] , [0,∞)
4. Zbiory skończone

Zupełność nie jest własnością topologiczną.

Przykład

$d(x,y) = |x-y|$

$(0,1] \xleftrightarrow{1/x} [1,\infty)$

Podstawowość ciągu nie musi być zachowana przez funkcję ciągłą, ale jest zachowana przez funkcję jednostajnie ciągłą.

10. Ośrodkowość

Przestrzeń (X,d) jest **<u>ośrodkowa</u>**, jeśli istnieje w niej zbiór przeliczalny gęsty (ośrodek).

Przykład

Każdy podzbiór prostej.

Jeśli (X,d) jest ośrodkowa i $Y \subset X$ to (Y,d) też jest ośrodkowa.

Ośrodkowość jest własnością topologiczną.

Obraz zbioru gęstego jest gęsty.

Przestrzeń **<u>polska</u>** – homeomorficzna przestrzeń z przestrzenią ośrodkową zupełną.

Przestrzeń jest **zupełna**, jeśli dla każdej przestrzeni metrycznej (Y,d) takiej, że $Y \subset X$, *X* jest zbiorem domkniętym.

Dowód
(……)

11. Całkowita ograniczoność

(X,d) jest **całkowicie ograniczona** jeśli $\forall_{\varepsilon} \exists_{F} X \subset \bigcup_{x \in F} K(x,\varepsilon)$

Przestrzeń całkowicie ograniczona jest ograniczona.
Dowód
(……)
Przestrzeń ograniczona nie musi być całkowicie ograniczona.
Przykład
X – dowolna nieograniczona, np. R
d – dyskretna
Całkowita ograniczoność jest zachowywana przez homeomorfizm jednostajny, ale nie zwykły.

12. Zwartość

Przestrzeń metryczna (X,d) jest **zwarta**, jeśli jest całkowicie ograniczona i zupełna.
Przez **ε-sieć** możemy pokazać, że dana przestrzeń jest całkowicie ograniczona; punkty w odległości 2ε od siebie i koła na tych punktach pokrywają całą przestrzeń. Ponadto z dowolnego miejsca w przestrzeni odległość do każdego takiego punktu jest conajwyżej ε.
Następujące warunki są równoważne:

1. *X* jest zwarta
2. $\forall_{(x_n) \in X} \exists_{(x_{n_k})} x_{n_k} \to x \in X$ (każdy ciąg zawiera podciąg zbieżny)
3. $X = \bigcup_{J \in I} U \Rightarrow \exists_{J \in I, card(J) < \infty} \bigcup_{J \in I} U \in X$ (z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone)
4. $\forall_{(Y,e)} \forall_{F \subset Y} \exists_{f: X \leftrightarrow F \text{ homomorficzna}} \Rightarrow F$ domknięty w *Y*
5. $\forall_{(Y,e)} \exists_{f: X \leftrightarrow Y \text{ homomorficzna}} \Rightarrow (Y,e)$ jest zupełna
6. $\{F_\iota\}_{\iota \in I}$ to rodzina podzbiorów domkniętych w *X*, scentrowana, tzn.
   $\forall_{J \in I, card(J) < \infty} \bigcap_{\iota \in J} F_\iota \neq \phi$

Dowód
(……)
Przestrzeń zwarta jest ośrodkowa. Za ośrodek można wziąć sumę ε_n-sieci przy ε_n malejącym do 0.
Zbiór zwarty jest domknięty.
Funkcja $f:(X,d) \to (Y,e)$ spełnia warunek Lipschitza jeśli $\exists_{c>0} \forall_{x,y} e\big(f(x), f(y)\big) \leq c d(x,y)$
Przykład
$f: \Re \to \Re, |f'(x)| < c$ jeśli (Lipschitz ze stałą c)

$$\frac{(x) - f(y)}{x - y} = |f'(z)| \leq c$$

Jeśli (X,d) to przestrzeń metryczna zupełna, $f: X \to X$ - Lipschitzowska ze stałą c<1 to $\exists! x^* \in X$ takie, że *f(x*)=x** oraz dla $x \in X$ ciąg $x_n = f^{\circ n}(x) \to x^*$

Dowód
(……)
Przykład
Liczenie pierwiastków

$$x \to \frac{5/x + x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{5/x^2 + 1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{2{,}5}{x^2}\right| < c < 1$$

$[2, \infty)$

Zaczynając od dowolnego x≥2 i iterując dojdziemy do jedynego punktu stałego, czyli (tu) $\sqrt{5}$.

Całkowicie ograniczony => istnieje homeomorficzny obraz X niezupełny.
Abstrakcyjne liczbowe przestrzenie metryczne $f : X \times X \to [0, \infty)$.

Wprowadzamy pseudometrykę:

$$d(x,y) = \inf\{f(x,x_1) + f(x_1,x_2) + ... + f(x_n,y) : n \in N_0, x_1,...,x_n \in X\}.$$

Interpretacja: $f(x,y)$ =cena za podróż z X do Y.

13. Przestrzenie produktowe przeliczalne

Ciąg (X, d_n) przestrzeni metrycznych ograniczonych.
Dla $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ skończonych:

$$d_{\sup}(x,y) = \sup_n (d_n(x_n, y_n))$$

$$d_{tax}(x,y) = \sum_n d_n(x_n, y_n)$$

$$d_{euk}(x,y) = \sqrt{\sum_n d_n(x_n, y_n)^2}$$

Dla $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ nieskończonych:

$$d_{\sup}(x,y) = \sup_n \left(\frac{d_n(x_n, y_n)}{Mn}\right) \leq 1$$

$$d_{tax}(x,y) = \sum_n \frac{d_n(x_n, y_n)}{Mn} * c_n$$

Przykład

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $d_{tax}(x,y) = \sum \frac{\delta_{x_n y}}{2^n}$

$x^{(k)} \to x \Leftrightarrow \forall_n x_n{}^{(k)} \to x_n$

(X, d_x) jest zupełna (zwarta) $\Leftrightarrow \forall_n (X_n, d_n)$ jest zupełna (zwarta).

Analiza Funkcjonalna.
14. Przestrzenie liniowo metryczne.

Przestrzeń liniowo metryczna jest to kompilacja przestrzeni liniowej $(X, +, \cdot)$, metrycznej (X, d) i ciągłości działań. Jest to więc przestrzeń $(X, d, +, \cdot)$ z ciągłymi działaniami:
$+ : (X \times X, d_{sup}) \to (X, d)$ i $\cdot : (X \times \mathbb{R}, d_{sup}) \to (X, d)$

Przykłady

1. $(\mathbb{R}, |x - y|, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{R}^n, d_{euk}, +, \cdot)$

3. $l^1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}: \sum_n |x_n| < \infty\}$, $d_{l^1} = \sum_n |x_n - y^n|$
$l^2 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}: \sum_n {x_n}^2 < \infty\}$, $d_{l^2} = \sqrt{\sum_n |x_n - y^n|}$
4. $c = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim x_n \text{ istnieje}\}$, $d_{\sup}$
$c_b = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} - \text{ciągi ograniczone}\}$, $d_{2^{-n}}$
$c_0 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim x_n = 0\}$, $d_{\sup}$
5. $\mu([0,1], \mathfrak{B})$ - ograniczona miara znakowana. Istnieje przeliczalna rodzina zbiorów, która generuje $\mathfrak{B}$, np. przedziały (q_1,q_2) o końcach wymiernych.
6. $C(\mathbb{R})$ - funkcje na prostej (uwaga: mogą być nieograniczone)
Zły przykład:
$([0,1]^{\mathbb{N}}, d_{2^{-n}}, +, \cdot)$ - nie nadaje się, gdyż nie ma liniowości dodawania (1+1=2)

Metryka supremum ucięta do 1: $\overline{d_{sup}}^1 = \min\{d_{sup}(f,g), 1\}$. Norma nie istnieje.

15. Przestrzenie liniowe unormowane.

<u>**Norma przestrzeni liniowej unormowanej**</u> to funkcja jednej zmiennej $||\cdot||: V \to [0,\infty)$ o własnościach:

1. $||x||=0 \Leftrightarrow x=0$
2. $||x+y|| \le ||x||+||y||$
3. $||\alpha x||=|\alpha|||x||$

Norma zadaje **metrykę** w której V jest przestrzenią liniowo metryczną. $d = d_{||\cdot||}(x,y) = ||x-y||$.

Sprawdzenie
(…)

Przestrzeń liniowa z normą to przestrzeń unormowana. W przestrzeni unormowanej można normę odzyskać z metryki. $||x|| = d(x, \mathbb{0}) = ||x - \mathbb{0}|| = ||x||$. W dowolnej przestrzeni metrycznej $||x|| = d(x, \mathbb{0})$ spełnia 1. własność z definicji normy, ale niekoniecznie 2. i 3.
Metryka normowa spełnia $||x-y|| = \boxed{d(x,y) = d(x+z, y+z)} = ||(x+z)-(y+z)||$.

Przykłady
$l^\infty = cb$ - ciągi ograniczone $||x_n|| = \sup|x_n|$
c - ciągi zbieżne $||x_n|| = \sup|x_n|$
c_0 - ciągi zbieżne do 0 $||x_n|| = \sup|x_n|$
l^1 - ciągi bezwzględnie sumowalne $||x_n||_{l^1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$
l^2 - ciągi sumowalne z kwadratem $||x_n||_{l^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} {x_n}^2}$

$\sup|x_n + y_n| \le \sup|x_n| + \sup|y_n|$ $\quad \sum|x_n + y_n| \le \sum|x_n| + \sum|y_n| = \sum(|x_n| + |y_n|)$

$CB(\mathbb{R})$ - funkcje ograniczone na $\mathbb{R}$. $||f||_{sup} = \sup_x |f(x)|$
$L^1(\mu) = \{[f]: \int f d\mu < \infty\}$, $||f||_1 = \int |f| d\mu$
$L^2(\mu) = \{[f]: \int f^2 d\mu < \infty\}$, $||f||_2 = \sqrt{\int f^2 d\mu}$

$L^1 \subset L^2$ dla μ liczącej
$L^2 \subset L^1$ dla μ skończonej

$C(\mathbb{R})$ z $d_{sup,obcięta}(f,g) = \min\{1, \sup_x |f(x) - g(x)|\}$. Ta metryka nie pochodzi bezpośrednio od żadnej normy. $d(0,2) = 1, ||2|| = 1$ $||1|| = 1$

16. Przestrzenie Banacha.

Przestrzeń unormowana zupełna w metryce normowej to <u>**przestrzeń Banacha**</u>.

Przykłady

$(L^1, ||\cdot||_1), (L^2, ||\cdot||_2)$
$\big(C(x), ||\cdot||_{sup}\big), \big(CB(\mathbb{R}), ||\cdot||_{sup}\big), \big(l^\infty, ||\cdot||_{sup}\big), (l^1, ||\cdot||_1), (l^2, ||\cdot||_2)$
$\big(c_0, ||\cdot||_{sup}\big), \big(c, ||\cdot||_{sup}\big), \big(c_0(\mathbb{R}), ||\cdot||_{sup}\big)$

Funkcja zbiega do 0 w $\pm\infty \Rightarrow$ wszystkie inne funkcje siedzą w pasku epsilonowym.

Przykłady (podkreślenie oznacza ośrodkowość)
Przestrzenie Banacha – ciągów – <u>c</u>, <u>c_0</u>, <u>l^1</u>, <u>l^2</u>, l^∞
Przestrzenie Banacha – funkcyjne – <u>C([0,1])</u>, CB(ℝ), <u>$L^1(\mu)$</u>, <u>$L^2(\mu)$</u>

Układ wektorów $x_1, \dots, x_n \in V$ jest liniowo niezależny, jeśli $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Zbiór $B \subset V$ jest niezależny jeśli każdy jego podzbiór skończony jest układem niezależnym.

17. Baza Hamela.

Zbiór $B \subset V$ to **<u>baza Hamela</u>** przestrzeni liniowej V jeśli B jest zbiorem niezależnym i każdy $x \in V$ jest postaci $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k$ $k \in \mathbb{N}$ $b_k \in B$ $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Każda przestrzeń linowa V posiada **bazę Hamela** B.

Każdy zbiór B jest zawarty w jakiejś **bazie Hamela** B'.

Dowód
(…)
Przykłady

$\mathbb{R}^n : \underbrace{\overbrace{(1,0,0,\dots 0)}^{n}, \overbrace{(0,1,0,\dots 0)}^{n}, \dots, \overbrace{(0,0,0,\dots 1)}^{n}}_{n}$

w c, c_0, l^∞ nie jest to **baza Hamela** – nie ma np. $1/2^n$. Jest to baza ciągów które od pewnego miejsca mają 0.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ elementów x_n przestrzeni unormowanej (Banacha) V jest „zbieżny” do $x \in V$ jeśli ciąg sum częściowych $s_n = \sum_{l=1}^{n} x_i$ zbiega do x w normie.

18. Baza Schaudera.

W **przestrzeni Banacha** V zbiór $B \subset V$ to **<u>baza Schaudera</u>**, jeśli

1. $\#B \leq X$
2. każdy $x \in V$ to granica szeregu $\sum \alpha_n b_n$, $\alpha \in \mathbb{R}, b \in B$.
3. jeśli $\sum \alpha_n b_n = \sum \beta_n c_n$ to $\{b_n, n \in \mathbb{N}\} = \{c_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Baza Schaudera to zbiór niezależny.

Jeśli **przestrzeń Banacha** ma **bazę Schaudera** to jest ośrodkowa. (nie odwrotnie)

Przykład
c, c_0, l^1, l^2 : $B = \{e_1, e_2, \dots\}$; $e_i = (0,0,\dots,1,\dots,0)$

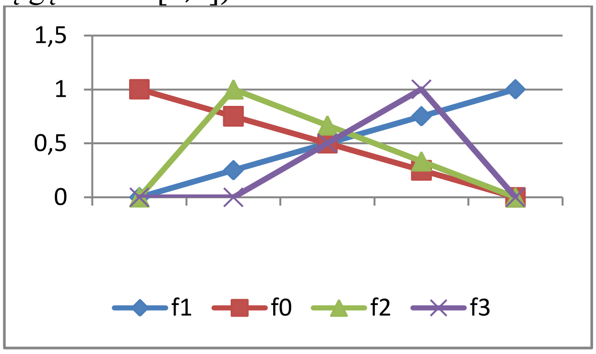
Zbiór B (nawet mierzalny) o tej własności, że $\forall_{x \in V}$ można przybliżać kombinacjami skończonymi z B nie musi mieć lim $\left|\begin{matrix}(x_1, 0,0,\dots) \\ \vdots \\ (x_1, x_2, \dots)\end{matrix}\right|$.

Dzielenie przestrzeni przez pseudonormę.

1. $||0|| = 0$
2. $||x|| + ||y|| \geq ||x + y||$
3. $||\alpha x|| = \alpha ||x||$

Relacja równoważności: $x \sim y \Leftrightarrow ||x - y|| = 0$.

Baza Schaudera w $L^2[0,1]$. Każdą funkcję ciągłą na $[0,1]$ można przybliżać jednostajnie wielomianami (które leżą gęsto w $C[0,1]$).



Przykład

Przestrzeń zespolona $L^2(\lambda)$ na $\Pi = \{z: |z| = 1\}$.

19. Iloczyn skalarny.

Dana jest przestrzeń liniowa V. **Iloczyn skalarny** w V to funkcja $<\cdot,\cdot>$ $V \times V \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ spełniająca warunki:

1. $< u,u > \geq 0$
   $< u,u >= 0 \Leftrightarrow u = \mathbb{0}$
2. $< u,v >= \overline{< v,u >}$
3. $\alpha < u,v >=< \alpha u,v >$
   $< u,\alpha v >= \overline{\alpha} < u,v >$
4. $< u+v,w >=< u,w > + < v,w >$
   $< u,v+w >=< u,v > + < u,w >$

Jeśli dany jest **iloczyn skalarny** to zadaje on normę $||u|| = \sqrt{< u,u >}$

Dowód

(…)

Nierówność Schwarza: $| < x,y > | \leq ||x|| * ||y||$

Iloczyn skalarny jest ciągły. $x_n \xrightarrow{||\cdot||} x$ $y_n \xrightarrow{||\cdot||} y$ $\Rightarrow < x_n, y_n > \to < x,y >$

20. Przestrzeń unitarna.

Przestrzeń unitarna – $(V, <\cdot,\cdot>)$.

Przestrzeń unitarna zupełna to **przestrzeń Hilberta**.

Przykłady

1. $\mathbb{R}^n$ $< (x_k),(y_k) >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$
2. $\mathbb{C}^n$ $< (x_k),(y_k) >= \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$
3. l^2 $< (x_k),(y_k) >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$
4. $L^2(\lambda)$ $< f,g >= \int f\overline{g} d\lambda$ (w przypadku zespolonym warunek $\int |f|^2 d\lambda < \infty$)

X jest ortogonalny do y $(x \perp y)$ w **przestrzeni unitarnej** jeśli $< x,y >= 0$.

Jeśli $A \not\ni \mathbb{0}$ to zbiór o tej własności, że każde dwa elementy są $x \neq y \in A \Rightarrow x \perp y$ to A to zbiór niezależny.

Dowód

(…)

Istnieją układy niezależne ale nie parami ortogonalne.

Przykład

$\mathbb{R}^2 \ni \{(0,1),(1,1)\}; < (0,1),(1,1) >= 1$

21. Rzuty.

Jeśli V to **przestrzeń unitarna**, $W \subset V$ to **przestrzeń unitarna** i $x \in W$ to wektor $x' \in W$ to **rzut ortogonalny** na W jeśli $x - x' \perp y \ \forall_{y \in W}$.
Jeśli $x \in W$ to $x' = x$.
Jeśli W to **przestrzeń Hilberta** i $W \subset V$ to $\forall_{x \in V} x_w$ istnieje.
Jeśli W jest rozpięta na skończenie wielu wektorach wzajemnie ortogonalnych to $\forall_{x \in V} x_w$ istnieje $W = lin\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \ (x_i \perp x_j \ \forall_{i \neq j})$

Dowód

(…)

22. Ortogonalizacja Gramma-Schmidta.

Jeśli $\{x_1, x_2, \dots\}$ to skończony (przeliczalny) układ niezależny to istnieje macierz trójkątna A z wartościami różnymi od zera na przekątnej tego samego wymiaru co moc układu wektorów taka, że jeśli układ wektorów otrzymany przez formalny iloczyn $A * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$ jest **układem ortonormalnym**. Czyli $y_1 = a_{1,1}x_1$; $y_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2$; …

Dowód

(…)

23. Pozostałe twierdzenia dot. przestrzeni.

Jeśli V to przestrzeń ośrodkowa unitarna to każdy układ ortogonalny jest co najwyżej przeliczalny.

Dowód

(…)

Jeśli H to ośrodkowa przestrzeń Hilberta, to istnieje w niej ortonormalna baza Schaudera $\{e_1, e_2, \dots, e_{dż}\}$. Co więcej, każdy element $x \in H$ rozwija się jednoznacznie w zbieżny w normie szereg Fouriera $x = \sum_{i=1}^{dż} < x, e_i > e_i$. $\sum_{i=1}^{dż} < x, e_i >^2 = ||x||^2$

Dowód

(…)

Lemat

W przestrzeni Hilberta układ ortonormalny $\{x_n\}_{n=1}^{dż}$ z warunkiem $\overline{lin\{x_n\}} = H$ to baza Schaudera.

Dowód

(…)

(…)

Istnieje tylko jedna (z dokładnością do izometrycznego (unitarnego) izomorfizmu) ośrodkowa niekoniecznie wymiarowa przestrzeń Hilberta. Modelem dla niej jest l^2 (skończenie wymiarowa: $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{C}^n$).

Dowód

(…)

Jeżeli X to przestrzeń zwarta a A to podalgebra w $C(X)$ która jest gęsta gdy A rozdziela punkty i zawiera stałe. $\forall_{\substack{x \neq y \\ x,y \in X}} \exists_{f \in A} f(x) \neq f(y)$. Ponadto w przypadku zespolonym $f(x) \in A \Rightarrow \overline{f(x)} \in A$.

Szkic dowodu

(…)

24. Operatory i funkcjonały.

Operator liniowy $T: X \to Y$ to dowolne liniowe przekształcenie spełniające własności:
1. $T(x+y) = T(x) + T(y)$
2. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

Jeśli X i Y są unormowane, to możemy żądać, by T był ciągły.
Zbiór takich operatorów oznaczamy $\alpha(X, Y)$.
Ponadto, jeśli $Y = K$, to operator ciągły $T: X \to K$ nazywamy **funkcjonałem** (f albo x^*).
Przestrzeń funkcjonalna natomiast jest oznaczana przez X^*.
Zamiast $X^*(x)$ piszemy $< x, x^* >$ (co jest oczywiście liczbą).

Przykłady

1. $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$
   $T: X \to Y \quad T(x) = A[x]$ lub $T(x) = [x]B$
2. $X = C([0,1]), Y = C([0,1])$
   $T(f)(t) = \int_0^t f(x)dx$ lub $T(f) = fg_0$, $g_0 \in C(X)$
3. $X = C^1([0,1]), Y = C([0,1])$
   $T(f) = f'$
4. $V = C(X)$, X zwarta. μ - miara na X.
   $T_\mu(f) = \int f d\mu$. Jeśli $\mu = \delta_x$, to $T_\delta(f) = \int f d\mu = f(x_0)$

Operator $T: X \to Y$ jest ograniczony jeśli $\exists_M T(K_X(0,1)) \subset K_Y(0, M)$. ($\forall_{x \in X} ||T(x)|| \leq M||x||$).

Dowód

(…)

$T \in \alpha(X, Y) \Leftrightarrow T$ jest liniowy i ograniczony.

Dowód

(…)

Norma operatora T to liczba $||T|| = \inf\{M: \forall_{x \in K(0,1)} ||T(x)|| \leq M\} = \sup\{||T(x)||: ||x|| \leq 1\} = \sup\{||T(x)||: ||x|| = 1\}$. $||x^*|| = \sup\{| < x, x^* > |: ||x|| \leq 1\}$
$\alpha(X, Y)$ z tak określoną normą to przestrzeń liniowa unormowana.
Jeśli Y to przestrzeń Banacha to $\alpha(X, Y)$ to przestrzeń Banacha. X^* zawsze jest przestrzenią Banacha.

Dowód

(…)

X^* (przestrzeń Banacha funkcjonałów ograniczonych) to **przestrzeń dualna** do X.

Przykład

$(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$

I ogólnie dla przestrzeni Hilberta $H^* \cong H$ (czyli istnieje izomorfizm $\pi: H \leftrightarrow H^*$; zamiast $\pi(x)$ piszemy x^*)

Dowód

(…)

Przykład

$V = C(X)$ (X – zwarta)

$V^* \cong M(X)$ (ograniczone znakowane miary Borelowskie na X).

$C(x) \ni f \xrightarrow{\mu^*} \int f d\mu$; $\mu^* \in V^*$

$(l^1)^* \cong l^\infty$
$L^1([0,1])^* = L^\infty(0,1)$
$(l^2)^* \cong l^2$
$L^2([0,1])^* = L^2(0,1)$

$C(X)^* \cong M^{\pm}(X)$ (miary znakowane ograniczone; X - zwarta)

Dowód

(…)

W $M^{\pm}(B)$ $||\mu|| = \mu^+(X) + \mu^-(X)$ bywa normą.

Dla miary określamy normę taką, jaka jest norma odpowiedniego funkcjonału. $||\mu|| = \sup\{\int f d\mu : |f| \leq 1\}$.

Szkic dowodu

(…)

25. *-słabość.

V to przestrzeń Banacha. V^* to przestrzeń Banacha, topologia normowa. Można określić w V^* topologię *-słabą, a w V topologię słabą.

$x_n \to x$ w V słabo, jeśli $\forall_{\varphi \in V^*}\ \varphi(x_n) \Rightarrow \varphi(x)$.

Jeśli $x_n \to x$ w normie, to zbiega słabo.

Przykład

$L^2([-\pi, \pi])$

$1, sinnx, cosnx$

$||sinx|| = const \to 0$

$sinnx \nrightarrow 0$ w normie.

W przestrzeni Hilberta każdy podciąg bazy ortonormalnej dąży do zera słabo.

Ciąg funkcjonałów $x_n^* \to x^*$ x-słabo w V^*, jeśli $\forall_{y \in V} < y, x_n^* > \to < y, x^* >$.

Zbieżność funkcjonałów w normie implikuje *-słabą zbieżność.

$< v, x_n^* > - < v, x^* > = < v, x_n^* - x^* > \leq ||v|| \cdot ||x_n^* - x^*||$

Możemy więc mówić o *-słabej zbieżności w zbiorze miar ograniczonych na przestrzeni X.

$\mu_n \xrightarrow{*-slabo} \mu \quad \forall_{f \in C(x)} \int f d\mu_n \to \int f d\mu.$